Matthias Jauernig
03In1

Numerik I
2. Beleg

01.11.04

1. Aufgabe:

$$2.1305\cdot 10^{-3}\, x_1 + 6.7034\, x_2 = 1.9041\cdot 10^{1}$$
$$9.8702\, x_1 - 1.8132\, x_2 = 4.7207$$

(a) $l_{21} = -\frac{9.8702}{2.1305\cdot 10^{-3}} \doteq -4632.8$

$a_{22}^{(1)} = 6.7034\cdot(-4632.8) - 1.8132 \doteq -31058$

$b_2^{(1)} = 1.9041\cdot 10^{1}\cdot(-4632.8) + 4.7207 \doteq -88208$

$\rightarrow x_2 \doteq \frac{-88208}{-31058} \doteq 2.8401$

$x_1 \doteq (1.9041\cdot 10^{1} - 6.7034\cdot 2.8401)/(2.1305\cdot 10^{-3})$

$\doteq (1.9041\cdot 10^{1} - 19.038)/(2.1305\cdot 10^{-3})$

$\doteq 0.003/(2.1305\cdot 10^{-3}) = 1.4081$

$\underline{\vec{x}^T \doteq (1.4081,\ 2.8401)}$ ✓

(b) $eps_M = 5\cdot 10^{-5}$ $\qquad x_1^+ = 1.000032$
$\qquad x_2^+ = 2.840181$

$\left|\frac{rd(x)-x}{x}\right| \leq eps_M$ $\rightarrow$ relativer Fehler

Verstärkung der relativen Eingangsfehler bzgl. x_1:

$\left|\frac{1.4081-1.000032}{1.000032}\right| = 0.4080549422 > 5\cdot 10^{-5}$

↳ Fehlerverstärkung: $\frac{0.4080549422}{5\cdot 10^{-5}} = \underline{\underline{8161,1}}$ ✓

(1)

2. Aufgabe:

$p(x) = x^2 + 2px - q \rightarrow x_{1/2} = -p \pm \sqrt{p^2+q}$

(a) • $P_1(x) = x^2 - 3x + 2$

$x_1 = 1.5 + \sqrt{0.25} = \underline{2}$ ✓, $x_2 = 1.5 - \sqrt{0.25} = \underline{1}$ ✓

• $P_2(x) = x^2 - 3x + 1.999999$

$x_1 = 1.5 + \sqrt{0.250001} = \underline{2.000001}$ ✓, $x_2 = 1.5 - \sqrt{0.250001} = \underline{0.999999}$ ✓

• $P_3(x) = x^2 + 2x + 1$

$x_1 = -1 + \sqrt{0} = \underline{-1}$, ✓ $x_2 = -1 - \sqrt{0} = \underline{-1}$ ✓

• $P_4(x) = x^2 + 2x + 0.999999$

$x_1 = -1 + \sqrt{0.000001} = \underline{-0.999}$ ✓, $x_2 = 1 - \sqrt{0.000001} = \underline{-1.001}$ ✓

(b) $x_1 = -p + \sqrt{p^2+q}$

- $K_q^{abs} = \left| \frac{\partial x_1}{\partial q} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}} \right|$

- $K_q^{rel} = \left| \frac{\partial x_1}{\partial q} \cdot \frac{q}{x_1} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}} \cdot \frac{q}{-p+\sqrt{p^2+q}} \right|$

→ durch x_1 und x_2 dargestellt:

$x_1 + x_2 = -2p \;\rightsquigarrow\; p = \frac{-x_1-x_2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot(x_1+x_2)$

$x_1 x_2 = -q \;\rightsquigarrow\; q = -x_1x_2$

- $K_q^{abs} = \left| \frac{1}{2\sqrt{(-\frac{1}{2}(x_1+x_2))^2 - x_1x_2}} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-x_1x_2}} \right|$

$= \left| \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}} \right| = \underline{\left| \frac{1}{x_1-x_2} \right|}$ ✓

- $K_q^{rel} = \left| \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \frac{-x_1x_2}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)} \right|$

$= \left| \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \frac{-x_1x_2}{\frac{1}{2}(x_1\cancel{+x_2}+x_1\cancel{-x_2})} \right|$

$= \left| \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \frac{\cancel{x_1}x_2}{\cancel{x_1}} \right| = \underline{\left| \frac{x_2}{x_1-x_2} \right|}$ ✓

$\underline{\underline{P_1}}$: $K_q^{abs} = \left| \frac{1}{2\sqrt{(-1.5)^2-2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \underline{\underline{1}}$ ✓

$K_q^{rel} = \left| \frac{-2}{1\cdot(1.5+\sqrt{0.25})} \right| = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{1}}$ ✓

$\underline{\underline{P_2}}$: $K_q^{abs} = \frac{1}{2\cdot 0.500001} = \underline{\underline{0.999998}}$ ✓

$K_q^{rel} = 0.999998 \cdot \left| \frac{-1.999999}{1.5+0.500001} \right| = \underline{\underline{0.999997}}$ ✓

$\underline{\underline{P_3}}$: $K_q^{abs} = \left| \frac{1}{2\sqrt{1-1}} \right| = \frac{1}{0} \;\rightsquigarrow\; \underline{\text{nicht def.}}$

$K_q^{rel} = \frac{1}{0} \;\rightsquigarrow\; \underline{\text{nicht def.}}$

$\underline{\underline{P_4}}$: $K_q^{abs} = \left| \frac{1}{2\sqrt{0.000001}} \right| = \underline{\underline{500}}$ ✓

$K_q^{rel} = 500 \cdot \left| \frac{-0.999999}{-1+\sqrt{0.000001}} \right| = 500\cdot 1.001 = \underline{\underline{500.5}}$ ✓

⇒ <u>Erklärung des Verhaltens unter (a):</u>

- bei Polynom P_2 betragen die Konditionszahlen 1, d.h. das Problem ist gut konditioniert und das spiegelt sich in x_1 und x_2 wieder, die relativ zu P_1 erst in der 6. Nachkommastelle verfälscht sind
- bei Polynom P_4 hat man hohe Konditionszahlen von ca. 500, womit das Problem schlechter konditioniert ist; reflektiert wird das durch x_1 und x_2, welche im Vergleich zu P_3 bereits in der dritten Nachkommastelle fehlerbehaftet sind

3. Aufgabe:

$$a = 100.00 \pm \underbrace{0.01}_{\Delta a} \qquad b = 101.00 \pm \underbrace{0.01}_{\Delta b} \qquad \gamma = 0.0100 \pm \underbrace{0.0001}_{\Delta\gamma} \quad \text{(rad)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \iff c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$$

$$c = f(a, b, \gamma) = \sqrt{100^2 + 101^2 - 2\cdot 100 \cdot 101 \cdot \cos 0.01}$$

$$= \underline{1.4177 = \tilde{c} = f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\gamma})} \quad ✓$$

Unsicherheitsintervall:

$$99.99 \le a \le 100.01$$
$$100.99 \le b \le 101.01$$
$$0.0099 \le \gamma \le 0.0101$$

lin. Fehlerschätzung:

$$\Delta c \doteq |f_a|\,\Delta a + |f_b|\,\Delta b + |f_\gamma|\,\Delta\gamma$$

$$\rightarrow f_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}\cdot(2a-2b\cdot\cos\gamma) = \frac{a-b\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}}$$

$$f_b = \frac{1}{2}\cdot(2b-2a\cdot\cos\gamma)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{b-a\cdot\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}}$$

$$f_\gamma = \frac{1}{2}\cdot 2ab\cdot\sin\gamma\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}} = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}}$$

$$\rightarrow f_a(100, 101, 0.01) = -0.7017851196 \quad ✓$$

$$f_b(100, 101, 0.01) = 0.7088737988 \quad ✓$$

$$f_\gamma(100, 101, 0.01) = 71.23886903 \quad ✓$$

$$\rightsquigarrow \Delta c \doteq 0.7017851196\cdot 0.01 + 0.7088737988\cdot 0.01 + 71.23886903\cdot 0.0001$$

$$= 0.0070178512 + 0.007088738 + 0.0071238869 = 0.0212304761$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c \doteq 1.4177 \pm 0.02123}} \quad ✓$$

Berechnung der Konditionszahlen:

	Eingangsfehler abs.	Eingangsfehler rel.	Ausgangsfehler abs.	Ausgangsfehler rel.	abs. Kond.zahl	rel. Kond.zahl
a	0.01	0.01%	0.0070185	0.495%	0.70185 ✓	49.5 ✓
b	0.01	0.0099%	0.007089	0.5%	0.7088738 ✓	50.5 ✓
γ	0.0001	1%	0.0071239	0.5025%	71.238869 ✓	0.5024 ✓

4. Aufgabe: $A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = 10^8 \cdot \begin{pmatrix} 0.1441 & -0.8648 \\ -0.2161 & 1.2969 \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$$

p = 1: $\|A\|_1 = \max_{k \in (1,\dots,n)} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| = 1.513$

$$\|A^{-1}\|_1 = 2.1617 \cdot 10^8$$

$$\Rightarrow \text{cond}_1(A) = 1.513 \cdot 2.1617 \cdot 10^8 = \underline{\underline{3.2706521 \cdot 10^8}} \checkmark$$

p = 2: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$, λ_{max} größter EW von A^TA

1.) $A^TA = \begin{pmatrix} 1.7286 & 1.1527 \\ 1.1527 & 0.76864 \end{pmatrix}$

char. Glchg.:

$$|A^TA - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1.7286-\lambda & 1.1527 \\ 1.1527 & 0.76864-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1.72864882-\lambda)(0.76864385-\lambda) - 1.15269913^2$$

$$= \lambda^2 - 2.49729267\lambda = 0$$

$\rightsquigarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 2.49729267 = \lambda_{max}$

$\hookrightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} = \underline{1.580282465}$

2.) $(A^{-1})^T A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.06746402 & -0.40487777 \\ -0.40487777 & 2.42982865 \end{pmatrix} \cdot 10^{16}$

char. Glchg.:

$$|(A^{-1})^TA^{-1} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0.06746 \cdot 10^{16} - \lambda & -0.4049 \cdot 10^{16} \\ -0.4048 \cdot 10^{16} & 2.4298 \cdot 10^{16} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (0.06746 \cdot 10^{16} - \lambda)(2.4298 \cdot 10^{16} - \lambda) - 0.4049^2 \cdot 10^{32}$$

$$= \lambda^2 - 2.49729267\lambda \cdot 10^{16} = 0$$

$\rightsquigarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 2.49729267 \cdot 10^{16} = \lambda_{max}$

$\hookrightarrow \|\hat{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} = \underline{1.580282465 \cdot 10^8}$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(A) = 1.580282465^2 \cdot 10^8 = \underline{\underline{2.497292669 \cdot 10^8}} \checkmark$$

$p = "\infty"$: $\|A\|_\infty = \max_{i\in(1,\dots,m)} \sum_{j=1} |a_{ij}| = 2.1617$

$\|A^{-1}\|_\infty = 1.513 \cdot 10^8$

$\Rightarrow \text{cond}_\infty(A) = 2.1617 \cdot 1.513 \cdot 10^8 = \underline{3.2706521 \cdot 10^8}$ ✓

(Anm.: $\text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_1(A)$)

Frobeniusnorm: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = 1.580282465 = \|A\|_2$

$\|A^{-1}\|_F = 1.580282465 \cdot 10^8 = \|A^{-1}\|_2$

$\Rightarrow \|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F = 1.580282465^2 \cdot 10^8 = \underline{2.4972926 7 \cdot 10^8}$ ✓

↳ Vergleich zu $\text{cond}_2(A)$: $\|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F$ entspricht dem Wert von $\text{cond}_2(A)$ (1)

5. Aufgabe:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

(a) $Ax = b$: $\quad 1.2969 x_1 + 0.8648 x_2 = 0.8642$
$\quad\quad 0.2161 x_1 + 0.1441 x_2 = 0.1440 + \varepsilon$

$$l_{21} = -\frac{0.2161}{1.2969} = -0.1666281132$$

$$a_{22}^{(1)} = 0.1441 - \frac{0.2161}{1.2969} \cdot 0.8648 = 7.71069 \cdot 10^{-9}$$

$$b_2^{(1)} = 0.1440 + \varepsilon - \frac{0.2161}{1.2969} \cdot 0.8642 = 0.1440 + \varepsilon - 0.1440000154$$

$\underline{\varepsilon = 0}$: $b_2^{(1)} = -1.542139 \cdot 10^{-8}$

$$x_2 = -\frac{1.542139 \cdot \cancel{10^{-8}}}{7.71069 \cdot \cancel{10^{-9}}_{1}} = -2.000001297$$

$$x_1 = (0.8642 + 0.8648 \cdot 2.000001297) / 1.2969 = 2.000000865$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{x}^T = (2.000000865, -2.000001297)}$$ ✓

$\underline{\varepsilon = 10^{-4}}$:

$b_2^{(1)} = 9.998457861 \cdot 10^{-5}$

$$x_2 = \frac{9.998457861 \cdot \cancel{10^{-5}}}{7.71069 \cdot \cancel{10^{-9}}_{4}} = 12967.00796$$

$$x_1 = (0.8642 - 0.8648 \cdot 12967.00796) / 1.2969 = -8646.005308$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{x}^T = (-8646.005308, 12967.00796)}$$ ✓

$\underline{\varepsilon = -10^{-4}}$:

$b_2^{(1)} = -1.00015421 \cdot 10^{-4}$

$$x_2 = \frac{-1.00015421 \cdot \cancel{10^{-4}}}{7.71069 \cdot \cancel{10^{-9}}_{5}} = -12971.00796$$

$$x_1 = (0.8642 + 0.8648 \cdot 12971.00796) / 1.2969 = 8650.00531$$

$$\Rightarrow \vec{x}^T = (8650.00531, -12971.00796)$$ ✓

(b) <u>für $\varepsilon = 10^{-4}$:</u>

$$\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^* = \begin{pmatrix} -8648.005309 \\ 12969.00796 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\Delta\vec{x}\|_1 = 21617.01327 \\ \|\vec{x}^*\|_1 = 4.000002162 \end{array}\right\} \frac{\|\Delta\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}^*\|_1} = \underline{5404.250397} \checkmark$$

$$\Delta\vec{b} = \vec{b} - \vec{b}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\Delta\vec{b}\|_1 = 0.0001 \\ \|\vec{b}^*\|_1 = 1.0082 \end{array}\right\} \frac{\|\Delta\vec{b}\|_1}{\|\vec{b}^*\|_1} = \underline{9.918666931 \cdot 10^{-5}} \checkmark$$

<u>für $\varepsilon = -10^{-4}$:</u>

Faktor der Fehler-verstärkg. $k \cdot 5{,}45 \cdot 10^{7}$

$$\left.\begin{array}{l} \|\Delta\vec{x}\|_1 = 21617.01327 \\ \|\vec{x}^*\|_1 = 4.000002162 \end{array}\right\} \frac{\|\Delta\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}^*\|_1} = \underline{5404.250236} \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\Delta\vec{b}\|_1 = 9.9999996 \cdot 10^{-5} \\ \|\vec{b}^*\|_1 = 1.0082 \end{array}\right\} \frac{\|\Delta\vec{b}\|_1}{\|\vec{b}^*\|_1} = \underline{-9.91866689 \cdot 10^{-5}} \checkmark$$

→ der relative Fehler ist jeweils milliardenfach größer dem relativen Eingangsfehler, wobei die Fehler bei $\varepsilon = 10^{-4}$ in etwa denen von $\varepsilon = -10^{-4}$ entsprechen

1

$\frac{5}{5}$ Har