Matthias Jauernig 20.10.03
Kurs: 03In1

2. Aufgabenserie zu den Grundlagen der Informatik

Prof. Dr. Jahn, HTWK Leipzig
Abgabetermin: Mi, 22.10.03

Zu 4.) siehe C-Quellcode im Anhang

Zu 5.) (a) $A:=\{a, b\}$
$A^0:=\{\varepsilon\}$
$A^1:=A^0 \circ A:=\{a, b\}$
$A^2:=A^1 \circ A:=\{aa, ab, ba, bb\}$
$A^3:=A^2 \circ A:=\{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$

$\rightarrow A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 := \{a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,aba,abb,baa,bab,bba,bbb\}$

(b) A hat k Elemente, $k \geq 1$:

- Wie viel Zeichen sind in A^n enthalten, wenn $n \in \mathbb{N}$?:
  Lösungsansatz: in A^1 sind k Zeichenketten enthalten, in A^2 wird jede der k Zeichenketten aus A^1 mit den k Elementen aus A verknüpft, d.h. es entsteht das k-Fache ($k*k=k^2$) an Zeichenketten; in A^3 werden die k*k Zeichenketten aus A^2 mit den k Elementen aus A verknüpft, so entstehen k*k*k ($=k^3$) Zeichenketten usw.;

  Insgesamt lässt sich somit die Lösung definieren:
  In A^n sind k^n Zeichenketten enthalten!

- Wie viel Elemente enthält $A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^n$?:
  Erster Ansatz ist, dass es sich hierbei um eine geometrische Reihe handelt, bei der der Faktor k ist. Die Reihe hat kann man durch folgende Summe definieren:

$$\sum_{i=1}^{n} k^i$$

Begründung: Wie oben bereits erwähnt, besteht A^{n+1} aus A^n*k Elementen, wobei A^1 k Elemente enthält. Somit sind in A^i k^i Zeichenketten enthalten. $A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^n$ ist nichts anderes als die Summe aller Glieder A^i von A^1 bis A^n.

Eliminiert man das Summenzeichen, so erhält man für k>1 das Bildungsgesetz der geometrischen Reihe in Gleichungsform:

$$\sum_{i=1}^{n} k^i = \frac{k\,(k^n - 1)}{k - 1}$$

Als Begründung der Richtigkeit will ich diese Gleichung mittels vollständiger Induktion beweisen:

1. Induktionsanfang:
   Für n=1:
   $$\sum_{i=1}^{1} k^i = \frac{k\,(k^1 - 1)}{k - 1} = k$$

2. Induktionsschritt:
   - Annahme: $$\sum_{i=1}^{n} k^i = \frac{k\,(k^n - 1)}{k - 1}$$
   - Zu zeigen: $$\sum_{i=1}^{n+1} k^i = \frac{k\,(k^{n+1} - 1)}{k - 1}$$
   - Nachweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} k^i = \sum_{i=1}^{n} k^i + k^{n+1} = \frac{k\,(k^n - 1)}{k - 1} + k^{n+1}$$
$$= \frac{k^{n+1} - k + k^{n+1} * (k - 1)}{k - 1} = \frac{k^{n+1} - k + k^{n+2} - k^{n+1}}{k - 1}$$
$$= \frac{k^{n+2} - k}{k - 1} = \underline{\underline{\frac{k\,(k^{n+1} - 1)}{k - 1}}}$$

w.z.b.w.

Die einzige Abweichung von dieser Gleichung ist gegeben, wenn k=1. In diesem Fall würde die Gleichung zu einer Division durch 0 führen, was nicht zulässig ist. Für k=1 muss deshalb definiert werden: $\sum_{i=1}^{n} k^i = n$

Zu 6.) Es bedeute:

r: it rains
pc: the picnic is cancelled
wet: I'll be wet
s: I stay at home

Dann sind die folgenden Sätze äquivalent zu den darunter stehenden aussagenlogischen Ausdrücken:

(a) If it rains but I stay at home, I won't be wet.
r ∧ s ⇒ ¬wet
(b) I'll be wet if it rains.
r ⇒ wet
(c) If it rains and the picnic is not cancelled or I don't stay at home, I'll be wet.
r ∧ ¬pc ∨ ¬s ⇒ wet
(d) Whether or not the picnic is cancelled, I'm staying home if it rains.
(pc ∨ ¬pc) ∧ r ⇒ s (oder einfacher: **r ⇒ s**)
(e) Either it doesn't rain or I'm staying at home.
¬r ⊕ s